TEMAS DE FÍSICA I

TIRO PARABÓLICO

Profr. Abelardo Rodríguez Soria et al TRIMESTRE 11-P

El problema general.

Se lanza un proyectil dentro del campo gravitatorio de la Tierra, con una velocidad inicial de magnitud v_0 que forma un ángulo θ_0 con la horizontal. Analizar el movimiento.

Propiedades del movimiento.

Fijemos el origen del sistema de coordenadas X-Y en el punto de lanzamiento. Definamos $t \equiv 0$ como el instante cuando se lanza el proyectil.

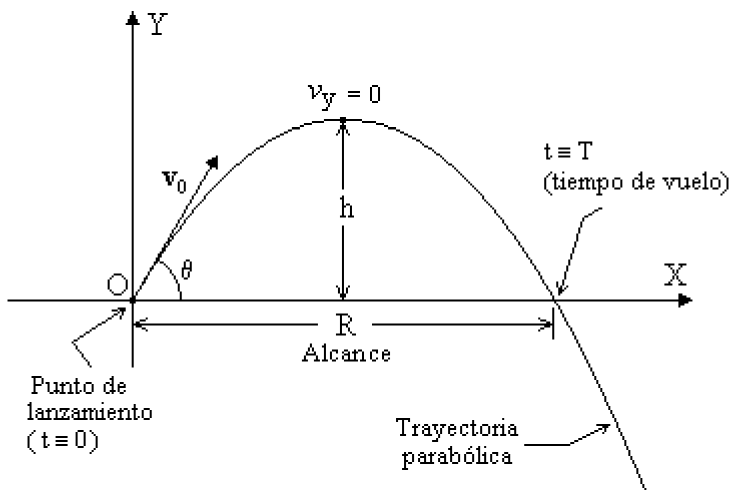


Fig. 1

La aceleración del proyectil es

$$\boldsymbol{a} = (0, -g) = -g\,\mathbf{j} \qquad \mathrm{g} = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

La velocidad inicial (en $t = 0$) es el vector

$$\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\theta_0, v_0 \operatorname{sen}\theta_0)$$

donde v_0 es la magnitud de $\mathbf{v}_0$.

Alcance

El *alcance* R es la distancia que alcanza el proyectil horizontalmente, es decir, medida al mismo nivel que el punto de lanzamiento.

Tiempo de vuelo

El *tiempo de vuelo* T es la duración del movimiento entre el punto de lanzamiento y el punto al mismo nivel que éste (donde $x = R$).

Ecuaciones de movimiento:

$x = v_0 \cos \theta_0 \cdot t$ (Ecuación *x(t)*)

$y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ (Ecuación *y(t)*)

Si el origen se coloca en el punto (x_0, y_0), cámbiense x y y por $x - x_0$ y $y - y_0$, respectivamente.

Velocidad en función del tiempo:

$v_x = v_0 \cos \theta_0 = \text{constante}$ (Ecuación $v_x(t)$)

$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - g t$ (Ecuación $v_y(t)$)

Ecuación de la trayectoria

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$ (Ecuación de la trayectoria)

[Si parte de (x_0, y_0), cambiar x por $x - x_0$ y y por $y - y_0$]

Fórmulas para el alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$

$$h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g}$$

$$T = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g}$$

He aquí otras propiedades del movimiento:

- El movimiento es una superposición de dos movimientos rectilíneos a lo largo de los ejes X y Y. El movimiento en X se verifica a velocidad constante igual a $v_0 \cos \theta_0$. El movimiento en Y tiene lugar con aceleración uniforme igual a "$- g$".
- Las velocidades de puntos situados a la misma altura son iguales en magnitud, diferenciándose solamente en su componente Y.

- El máximo alcance R se obtiene cuando el proyectil se lanza a 45° con la horizontal.
- En el punto de altura máxima h la componente Y de la velocidad es cero.

EJEMPLO 1. Se lanza una pelota con una velocidad cuya componente horizontal es 15 **m/s**, desde un punto a 2 **m** por arriba del suelo. La pelota apenas libra una pared que se halla a 10 **m** del punto de lanzamiento y que tiene una altura de 18 **m**. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

Tenemos tres puntos relevantes del movimiento (Fig. 2):

Punto # 0: Punto de lanzamiento.
Punto # 1: En lo alto de la pared.
Punto # 3: Suelo.

Situamos el origen del sistema X-Y en el punto de lanzamiento.

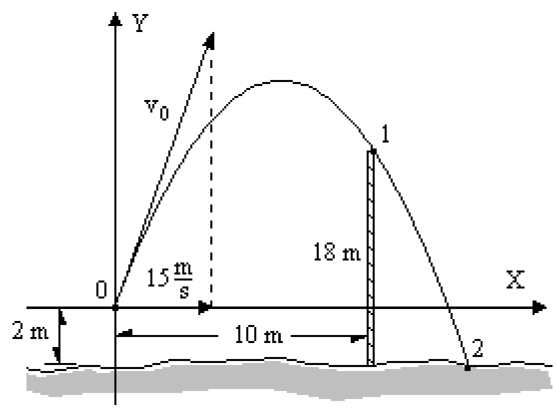


Fig. 2

Expresemos los datos e incógnitas en términos de los símbolos apropiados. Se desea calcular t_2.

Punto 0	Punto 1	Punto 2
$t_0 \equiv 0$ $x_0 = 0$ $y_0 = 0$ $v_{0X} = 15$	$x_1 = 10$ $y_1 = 16$	$y_2 = -2$

En la ecuación de la trayectoria, sustituyamos las coordenadas (10, 16) del punto 2 y el dato $v_0 \cos \theta_0 = v_{0X} = 15$:

$$16 = \tan\theta \cdot 10 - \frac{9.8(10)^2}{2(15)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta_0 = \arctan(1.8177) = 61.2°$$

Ahora, de $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ o sea $15 = v_0 \cos 61.2°$ obtenemos

$$v_0 = 31.14 \textbf{ m/s}$$

Finalmente, aplicando la ecuación $y(t)$ al punto 2, con $y_2 = -2$ obtenemos

$$y = v_0 \,\text{sen}\, \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$-2 = 31.14 \,\text{sen}\, 61.2°\, t_2 - 4.9\, t_2^2$$

$$4.9\, t_2^2 - 27.3\, t_2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ $\qquad t_2 = 5.64$ **s**.

EJEMPLO 2. Una partícula se proyecta desde un punto de un plano de inclinación 30°, con una velocidad de 6 **m/s** que forma un ángulo de 80° con el plano. Calcular el alcance D sobre el plano.

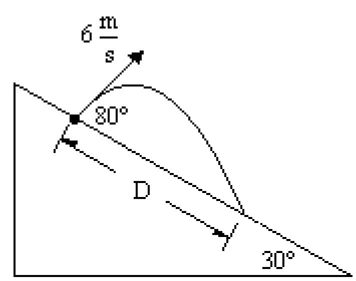


Fig. 3

Apliquemos la ecuación de la trayectoria, con $v_0 = 6$ m/s y $\theta_0 = 50°$:

$$y = \tan 50° \cdot x - \frac{9.8\, x^2}{2(6 \cos 50°)^2}$$

$\Rightarrow$ $\qquad y = 1.192\, x - 0.329\, x^2$

Esta ecuación la satisface el punto 1, cuyas coordenadas son (D cos 30°, – D sen 30°). Sustituyendo éstas en la ecuación de la trayectoria,

$$-0.5\, D = 1.192\, (0.866\, D) - 0.329\, (0.866\, D)^2$$

$$0.247\, D^2 - 1.532\, D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D = 6.2 \textbf{ m}$$

EJEMPLO 3.. Un proyectil que se lanza con velocidad de 30 **m/s** tiene un alcance de 20 **m**. Calcular la altura máxima que alcanza.

Utilizaremos las fórmulas para el alcance R y la altura máxima h:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

$$h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g}$$

Despejemos sen θ_0 de la segunda:

$$\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$$

Sustituyamos esta expresión en la primera y despejemos cos θ_0;

$$\cos\theta_0 = \frac{R}{2v_0}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Para eliminar el ángulo θ_0 de las dos últimas ecuaciones imponemos la condición

$$\operatorname{sen}^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 = 1$$

que arroja la ecuación

$$16gh^2 - 8v_0^2\, h + gR^2 = 0$$

Sustituyendo los datos del problema, esta ecuación se reduce a

$$156.8\, h^2 - 7200\, h + 3920 = 0$$

que tiene las soluciones

$$h_1 = 45.37 \ \mathbf{m} \qquad h_2 = 0.55 \ \mathbf{m}$$

(¿Por qué dos soluciones?)

EJEMPLO 4. Se lanza una piedra horizontalmente desde lo alto de una torre de 55 **m** de altura, con una velocidad de 16 **m/s**. Simultáneamente se lanza otra piedra en el mismo plano vertical, desde la base de la torre, con una velocidad de 32 **m/s** y a un ángulo de 60°. Demostrar que las piedras se encuentran, y hallar el punto donde se encuentran.

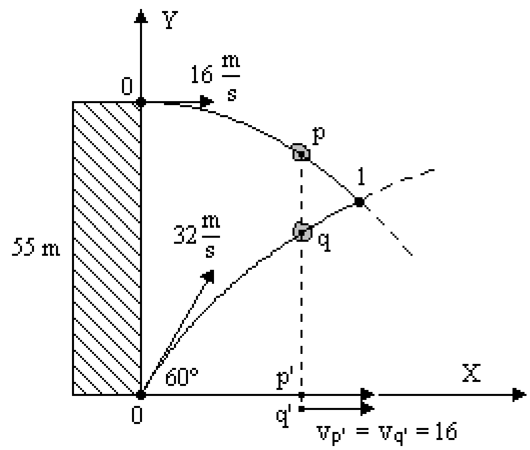


Fig. 4

Cada piedra parte de su respectivo "punto 0", marcado en la Fig. E40. Se supone que se encuentran en el punto 1. El origen del sistema XY se ha tomado en la base de la torre.

Denominemos con "p" y "q" las piedras. Sean p′ y q′ las proyecciones de las piedras sobre el eje X. Durante el movimiento parabólico de p y q, sus proyecciones p′ y q′ efectúan sendos movimientos rectilíneos con la misma velocidad $v_{p'} = v_{q'} = 16$ **m/s**. Esto es, *sus coordenadas* X *siempre coinciden*. Por otra parte, es obvio que sus coordenadas Y llegarán a coincidir, esto es, las piedras efectivamente chocan.

Las ecuaciones de movimiento son

Piedra lanzada desde arriba

$$y = 55 - \frac{9.8x^2}{2(16)^2} = 55 - 0.019x^2$$

Piedra lanzada en la base de la torre

$$y = (\tan 60°)x - \frac{9.8x^2}{2(32\cos 60°)^2} = 1.732x - 0.019x^2$$

(La fórmula dada anteriormente para la trayectoria debió ajustarse en el caso de la piedra lanzada desde arriba de la torre, pues ésta no parte del origen sino del punto $y_0 = 40$ **m**).

Igualando las y's obtenemos

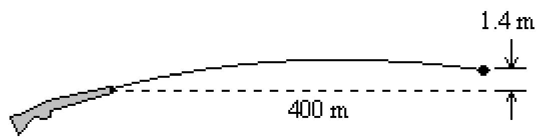
$$55 = 1.732\, x_1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 31.75 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \qquad y_1 = 55 - 0.019\, x_1^2$$

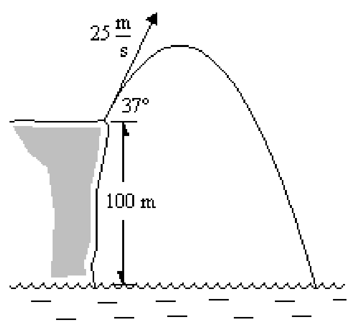
$y_1 = 55 - 0.019(31.75)^2 = 35.85$ **m**

5.8. Problemas.

1. Se dispara una bala con una velocidad cuya componente horizontal es 500 **m/s**. ¿A qué ángulo debe dispararse para que dé en una marca situada a 1.4 **m** por arriba del punto de proyección, a una distancia de 400 **m**?
Resp. 0.65°.

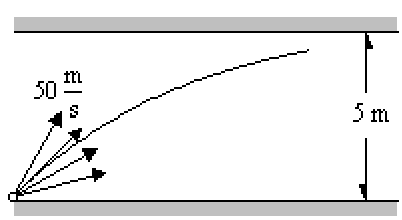


2. Una partícula es proyectada desde lo alto de un acantilado a 100 **m** sobre el nivel del mar, con una velocidad de 25 **m/s** y a un ángulo de 37° con la horizontal. Calcular qué tan lejos de la base del acantilado golpea la superficie del mar.
Resp. 126 **m**.

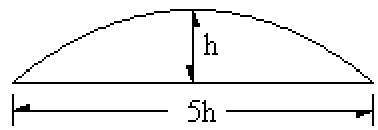


3. Un niño puede lanzar una piedra, lo más lejos, hasta una distancia de 40 **m**. ¿Con qué velocidad la lanza y cuánto tarda la piedra en el aire?
Resp. 19.8 **m/s**; 1.69 **s**.

4. Se proyecta una partícula hacia adentro de un túnel horizontal de 5 **m** de alto, con una velocidad de 50 **m/s**. ¿Cuál es el mayor alcance posible?
Resp. 99 **m**.



5. Un cuerpo es lanzado bajo un ángulo tal que su alcance horizontal es cinco veces su máxima altura. Calcular el ángulo al que se lanzó. Para un alcance de 200 **m**, hallar la velocidad inicial y el tiempo de vuelo correspondientes.
Resp. arctan(4/5); 44.8 **m**/s.



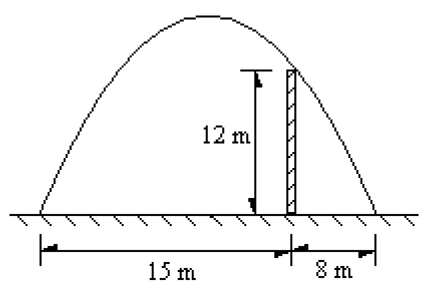
6. El máximo alcance de un rifle es 25 **km**. Hallar la velocidad de salida de la bala y la altura de la misma después de que ha viajado 6.4 **km** horizontalmente.
Resp. 0.495 **km/s**; 4.8 **km**.

7. Se desea que el alcance de un proyectil sea R, y que su tiempo de vuelo sea T. Demostrar que el ángulo de lanzamiento debe ser

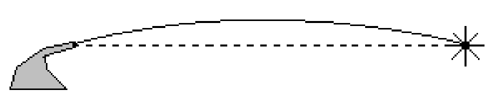
$$\theta = \arctan\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$$

8. ¿Qué velocidad inicial mínima debe tener un proyectil para poder librar una pared de 12 **m** de altura, distante 15 **m**, y pegar en el plano horizontal de la base de la pared a una distancia de 8 **m** más allá de la misma? El punto de lanzamiento está al mismo nivel que la base de la pared.

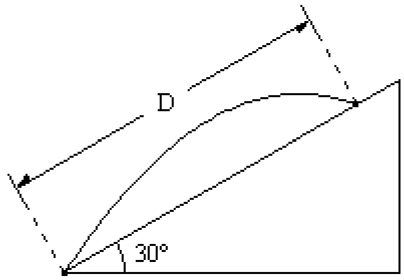
Resp. 16.1 **m/s**.



9. Una bala de cañón explota en un punto al mismo nivel del cañón, a los 10 **s** de haber sido disparada. El sonido de la explosión llega al cañón después de un lapso adicional de 3 **s**. Hallar el ángulo de elevación del cañón y la velocidad inicial de la bala. (Tome la velocidad del sonido igual a 335 **m/s**).
Resp. arctan(0.49); 111.8 **m/s**.



10. Se lanza un proyectil con una velocidad de 245 **m/s** bajo un ángulo de 60° con la horizontal, desde el pie de un plano de inclinación 30°. Hallar el alcance D sobre el plano inclinado y el tiempo para el impacto.
Resp. 4083 **m**; 25.5 **s**.


D
30°